А.М. Инков

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ. ЛЕКЦИЯ № 6



Шымкент, 2011

Лекция 6 Статические и динамические модели в форме уравнения регрессии (ч. 4)

В этой лекции нами будут рассмотрены методы планирования эксперимента, используемые при определении статические и динамические модели объектов в форме управления регрессии

Основные недостатки классического регрессионного анализа: корреляция между коэффициентами; трудности в оценке ошибки; необходимость проведения большого количества опытов; трудности при определении коэффициентов b_i вручную.

В основе методов статистического плана эксперимента (ПЭ) лежит использование упорядоченного плана расположения точек в факторном пространстве и использование новой безразмерной системы координат. Использование методов ПЭ позволяет устранить практически все недостатки регрессионного анализа.

Методы планирования эксперимента позволяют строить как статические, так и динамические модели. Те и другие могут быть определены аналитическими и экспериментально- статистическими методами. Теория оптимального эксперимента на начальном этапе развития имитационного моделирования применялась преимущественно при построении моделей статических объектов. Что касается построения динамических моделей, то методология построения базировалась в рамках пассивного эксперимента, когда идентификация велась в режиме нормального функционирования объекта. Однако, постепенно стали применять и активные методы идентификации с использованием специальных тестирующих сигналов. В качестве таких сигналов использовали псевдослучайные сигналы.

Основные понятия на которые надо обратить внимание: факторы (входы, воздействия – они не должны быть коррелированны), уровни (дискретные значения, принимаемые факторами), матрица ПЭ (собственно план), методы математической обработки.

Основные принципы планирования эксперимента (ПЭ).

Пассивным экспериментом называют эксперимент, в котором регистрация входных и выходных данных осуществляется в рабочем режиме, не используя дополнительных вмешательств. Он применяется тогда, когда структура модели хорошо известна и ее адекватность не вызывает сомнений (когда решаются задачи параметрической идентификации).

Активный эксперимент предполагает особую программу (план) проведения наблюдений таких, что позволяют по результатам исследований дополнительно оценить структуру модели.

Факторами активного эксперимента называют переменные, по которым возможно проводить управление и которые участвуют в построении модели (x_i).

Каждый из факторов может принимать различные значения, которые называются **уровнями**. На практике, количество уровней – это бесконечное количество или непрерывный ряд уровней $x_i \in \lfloor x_{0i},\ x_{ni} \rfloor$. В теории активного эксперимента этот ряд дискретизируется, и выбираются отдельные уровни: $\lfloor x_{i0},\ x_{i1},\ x_{i2} \rfloor$

Фиксированный набор уровней называется состоянием факторов.

План – это программа проведения эксперимента, позволяющая использовать все факторы на всех уровнях. Если план содержит всевозможные сочетания факторов и уровней, то такой план называют полным.

Если p – общее количество уровней; к – количество факторов, то полный план эксперимента будет включать в себя следующее количество экспериментов: $N = p^{\kappa}$.

методах ПЭ используются кодированные (безразмерные) параметров. Они соответствуют переносу начала координат в точку z_j^0 - центр плана (основной уровень).

$$z_j^0 = \frac{z_j^{\max} + z_j^{\min}}{2},\ j = 1,2..k. \qquad (6.1)$$

Интервал варьирования по оси z_j определяется по формуле:

$$\Delta z_j = \frac{z_j^{\max} - z_j^{\min}}{2} \qquad (6.2).$$

Для перехода от физических (натуральных) переменных z_j к безразмерным координатам x_j используют выражение:

$$x_j = \frac{z_j - z_j^0}{\Delta z_j} \qquad (6.3),$$

а для обратного перехода

$$z_j = z_j^0 + x_j \cdot \Delta z_j \qquad (6.5).$$

Например, пусть $z_1^{\max} = 200°C$ $z_1^{\min} = 100°C$, тогда

$\Delta z_1 = 50°C$, $z_1^0 = 150°C$ $x_1 = \dfrac{z_1 - z_1^0}{\Delta z_1}$,

при $z_1 = z_1^{\min} = 100°C$ $x_1 = \dfrac{100-150}{50} = -1$.

Для безразмерных переменных в ПФЭ верхний уровень равен +1, а нижний –1, координаты центра плана равны нулю. В некоторых планах (см. ниже) используются безразмерные значения факторов $x_j = \pm\alpha$, соответствующие им значения в натуральных координатах находят по выражению $z_j = z_j^0 + \alpha \cdot \Delta z_j$.

В приведенном примере при $\alpha = 1.4; z_1 = 150 + 1.4 \cdot 50 = 220°C$

Отметим, что введение безразмерной системы координат необходимо только для облегчения обработки результатов вручную. Если использовать для поиска решения матричное уравнение (4.15), то сразу получаем решение с найденными коэффициентами в натуральном (физическом) масштабе.

В полном факторном эксперименте (ПФЭ) обеспечивается проведение опытов при всех возможных сочетаниях значений факторов на всех уровнях варьирования, используются значения факторов только равные +1 и –1.

Необходимое число опытов ПФЭ: $N = (N_{УРОВНЕЙ})^K$, (6.6)

чаще используют $N_{УРОВНЕЙ} = 2$, тогда необходимое количество опытов см. таблицу 6.1):

Таблица 6.1

Необходимое количество опытов

Количество факторов –k	3	4	5	6	7
Количество опытов – N	8	16	32	64	128
Кол. коэф. линейной модели - L	4	5	6	7	8
Число степеней свободы - f	4	11	26	57	120

Матрица ПФЭ для 3-х факторов x_1 x_2 x_3 в безразмерном виде (y – выход, результат проведения опыта) имеет вид (см. таблицу. 6.2.):

Таблица 6.2

Матрица ПФЭ для 3-х факторов

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	y
1	+1	−1	−1	−1	y_1
2	+1	+1	−1	−1	y_2
3	+1	−1	+1	−1	y_3
4	+1	+1	+1	−1	y_4
5	+1	−1	−1	+1	y_5
6	+1	+1	−1	+1	y_6
7	+1	−1	+1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	y_8

План эксперимента понимается так. Например, для первого опыта:

$z_1 = z_1^{\min}$ $z_2 = z_2^{\min}$ $z_3 = z_3^{\min}$, результат опыта y_1, для второго опыта:

$z_1 = z_1^{\max}$ $z_2 = z_2^{\min}$ $z_3 = z_3^{\min}$, результат опыта y_2 и т.д.

Столбец x_0 соответствует т.н. – фиктивной переменной $x_0 = +1$, он необходим только для удобства вывода приведенных ниже выражений. Вычисление коэффициентов уравнения регрессии bi производят на основе известного выражения (5.14) $B = (X^T X)^{-1} X^T Y$. Однако приведенная в таблице матрица обладает рядом свойств, значительно упрощающих расчеты вручную.

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ui} \cdot x_{ji} = 0; u \neq j; u, j = 0,1,...,k \text{ - свойство ортогональности;} \qquad (6.7)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0;\ j = 1,...,k;\ j \neq 0 \qquad (6.8)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = N;\ j = 0,1,...,k; \qquad (6.9)$$

Ортогональность матрицы планирования приводит к диагональности матрицы $(X^T X)$, в результате чего легко вручную находится $(X^T X)^{-1}$ (см. стр. 162 в [1].), а коэффициенты уравнения регрессии b_i находятся по формуле:

$$b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji} \cdot y_i \qquad (6.10)$$

(напомним, что для можно сразу использовать уравнение (4.15).

Матрица ПЭ, приведенная в таблице 6.2. позволяет определить коэффициенты линейного уравнения регрессии:

$\hat{\hat{y}} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$.

В принципе имеющиеся степени свободы позволяют определить коэффициенты уравнения регрессии с учетом эффектов взаимодействия вида:

$$\hat{\hat{y}} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 \qquad (6.11)$$

Для этого матрицу ПЭ (см. таблицу 6.2.) надо дополнить фиктивными столбиками, содержащими информацию для x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 и $x_1x_2x_3$ (см. таблицу. 6.3.). Например $x_1 \cdot x_2 = x_1x_2 = (-1 \cdot -1) = +1$. При этом дополнительных опытов проводить не надо.

Таблица 6.3
План ПФЭ

№ оп.	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	y_2
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	y_5
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

Значимость коэффициентов и адекватность уравнения регрессии определяют, как описано выше. После того, как определен окончательный вид уравнения регрессии можно перейти от кодированных переменных к физическим переменным используя уравнения (6.5).

Дробный факторный эксперимент.

Другое название - метод дробных реплик. С увеличением количества факторов в ПФЭ резко возрастает число опытов и число степеней свободы. (см. таблицу 6.1.). Т.е. количество опытов в ПФЭ обычно превосходит число определяемых коэффициентов, т.е. ПФЭ обладает избыточностью опытов. В дробном факторном эксперименте (ДФЭ) в отличие от ПФЭ используются не все возможные сочетания уровней изучаемых факторов. Некоторые их сочетания пропускаются. Сокращение перебора уровней всегда приводит к потере части исходной информации. План ДФЭ строится так, чтобы обеспечить получение линейной модели, при этом необходимо, чтобы матрица планирования сохранила свойство ортогональности. Рассматриваемый метод заключается в том, что для получения математического описания используется часть ПФЭ. Например, при 4 факторах за основу берется план для трех факторов, а для четвертого фактора используется план, соответствующий одному из столбцов содержащих эффекты взаимодействия (столбцы 6-9 в таблице 6.3.). Если нет сведений о значимости взаимодействий факторов, то лучше выбрать столбец 9, соответствующий тройным взаимодействиям $x_4 = x_1 x_2 x_3$ или $x_4 = -x_1 x_2 x_3$, такие соотношения называют генерирующими соотношениями, так как они генерируют (создают) дробную реплику. Умножая обе части генерирующего соотношения на x_4 получаем $I = x_1 x_2 x_3 x_4$, называемое определяющим контрастом. Эксперимент проводят по плану (таблица 6.4):

Таблица 6.4
План ДФЭ

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	y
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	+1	–1	–1	–1	–1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	+1	y_2
3	+1	–1	+1	–1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	–1	–1	y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	y_5
6	+1	+1	–1	+1	–1	y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

По этому плану, например, для первого опыта:

$z_1 = z_1^{\min}$ $z_2 = z_2^{\min}$ $z_3 = z_3^{\min}$ $z_4 = z_4^{\min}$, результат опыта y_1.

План содержит половину опытов ПФЭ 24 и носит название полуреплики. Используют также ¼ реплики, ⅛ реплики и т.д. Обозначаются ДПЭ в виде 2k-p, где k – количество факторов, p –число дробных реплик, в нашем примере это 24-1. Расчет коэффициентов регрессии, проверка их значимости производят по тем же формулам, что и для ПФЭ.

Ортогональное планирования эксперимента

Другое название - планы Бокса-Уилсона. Для построения ортогональных центральных композиционных планов (ЦКП) используется так называемое звездное плечо α (плечо звездных точек). Это опыты, которые проводятся дополнительно, например, к плану ПФЭ (при k<5) или к дробному плану(при k≥5). В таблице 6.5. приведено такое дополнение к плану в таблице 6.2.

Таблица 6.5

Дополнение к плану в таблице 6.2

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	y	
9	+1	–α	0	0	y9	Звездные точки (2k точек)
10	+1	+α	0	0	y10	
11	+1	0	–α	0	y11	
12	+1	0	+α	0	y12	
13	+1	0	0	–α	y13	
14	+1	0	0	+α	y14	
15	+1	0	0	0	Y15	Центр плана N0 точек

Общее количество опытов определяется по формуле:

$N = 2^k + 2 \cdot k + N_0$ (при k<5) (6.12)

Обычно звездные точки и точку в центре добавляют, если при ПФЭ не удается получить адекватную математическую модель и при исследовании области, близкой к экстремуму. При описании такой области наиболее широко используют полиномы второго порядка. ЦКП неортогональны, но легко сводятся к ортогональным (ОЦКП), путем выбора α. Значения α приведены в таблице 6.6. ([1]., стр.181, 183)

Таблица 6.6

N_0	k=2	k=3	k=4
1	α=1,000	α=1,476	α=2,000
2	α=1,160	α=1,650	α=2,164
3	α=1,317	α=1,831	α=2,390

Матрица планирования для ОЦКП, используемая для расчета коэффициентов дополняется столбцами x_1^*, x_2^*…Например при k=2 и N0=1 получаем матрицу, приведенную в таблице 6.7. В таблице $x_j^* = x_j^2 - \bar{x}_j^2 = x_j^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2$, введено для получения ортогональной матрицы.

Таблица 6.7

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^*	x_2^*	y
1	2	3	4	6	8	9	10
1	+1	+1	+1	+1	+0,333	+0,333	y_1
2	+1	+1	–1	–1	+0,333	+0,333	y_2
3	+1	–1	–1	+1	+0,333	+0,333	y_3
4	+1	–1	+1	–1	+0,333	+0,333	y_4
5	+1	+1	0	0	+0,333	–0,667	y_5
6	+1	–1	0	0	+0,333	–0,667	y_6
7	+1	0	+1	0	–0,667	+0,333	y_7
8	+1	0	–1	0	–0,667	+0,333	y_8
9	+1	0	0	0	–0,667	–0,667	y_9

Благодаря ортогональности матрицы планирования все коэффициенты рассчитываются независимо друг от друга по формуле:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ji} \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2}, \qquad (6.13),$$

а дисперсии коэффициентов равны:

$$s_{b_j}^2 = \frac{s_{ВОСПР}^2}{\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2} \qquad (6.14)$$

В результате расчета по матрице в таблице 6.7 уравнение регрессии в ОЦКП получается в виде:

$$\hat{Y} = b_0^* + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... b_k x_k + b_{12} x_1 x_2 + ... + b_{(k-1)k} x_{k-1} x_k + ... + b_{11} x_1^* + ... + b_{kk} x_k^*$$

Чтобы перейти к обычной записи b_0 определяют по выражению:

$$b_0 = b_0^* - b_{11}\bar{x}_1^2 - ... - b_{kk}\bar{x}_k^2$$

и оценивают с дисперсией: $s_{b_0}^2 = s_{b_0^*}^2 + (\bar{x}_1^2)^2 s_{b_{11}}^2 + ... + (\bar{x}_k^2)^2 s_{b_{kk}}^2$

Зная дисперсию воспроизводимости, проверяют значимость коэффициентов и адекватность уравнения регрессии:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... b_k x_k + b_{12} x_1 x_2 + ... + b_{(k-1)k} x_{k-1} x_k + ... + b_{11} x_1^2 + ... + b_{kk} x_k^2$$

Адекватность проверяют по критерию Фишера, составляя отношение дисперсий: $F_{PAC} = \frac{S_{АД}^2}{S_{ВОСПР}^2}$, условие адекватности $F_{PAC} < F_{1-p}(f_1, f_2)$, где

$f_1 = f_{АД} = N - L \quad f_2 = f_{ВОСПР}$.

Значимость коэффициентов определяют по формуле:

$t_j = \frac{|b_j|}{S_{b_i}}$, если $t_j > t_{ТАБ}(f_2)$, то b_j считается значимым.

Т.к. b_j в ОЦКП определяются с разной точностью, то (при k<5):

$$s_{b_0} = \frac{s_{ВОСПР}}{\sqrt{N}},$$

$$s_{b_j} = \frac{s_{ВОСПР}}{\sqrt{2^k + 2\alpha^2}}, \ \mathrm{j} = 1,2,...,\mathrm{k}$$

$$s_{b_{uj}} = \frac{s_{ВОСПР}}{\sqrt{2^k}} \ \mathrm{u,j} = 1,2,..,\mathrm{k}, \ \mathrm{u} \neq \mathrm{j}$$

$$s_{b_{jj}} = \frac{s_{ВОСПР}}{\sqrt{2^k(1-\bar{x}_1^2)^2 + 2(\alpha^2 - \bar{x}_1^2)^2 + (N_0 + 2k - 2)(\bar{x}_1^2)^2}}, \ \mathrm{j} = 1,2,...,\mathrm{k}$$

Ротатабльное планирования эксперимента (РПЭ).

Другое название - планы Бокса-Хантера. Ортогональные планы не обладают свойством ротатабельности. РПЭ позволяет получать более точное математическое описание по сравнению с ЦКП. Это достигается увеличением числа опытов в центре плана и специальным выбором звездного плеча **α**. Характеристики РПЭ приведены в табл. 6.8.

Таблица 6.8.

Расчет числа опытов

Количество					Значение **α**
факторов - **k**	опытов				
	ПФЭ	в звездных точках	в центре плана – N_0	всего - N	
2	4	4	5	13	1,414
3	8	6	6	20	1,680
4	16	8	7	31	2,000
5	32	10	10	52	2,378

Коэффициенты уравнения регрессии коррелированны между собой, поэтому их можно найти, используя матричное выражение (5.14)

$B = (X^T X)^{-1} X^T Y$, т.е. надо выполнить обращение матрицы $(X^T X)$. Однако из-за особого вида этой матрицы при РПЭ можно получить аналитические выражения для расчета коэффициентов уравнения регрессии и их дисперсий.

Они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= a_1\sum_{i=1}^{N} y_i - a_2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i \quad b_j = a_3\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i;\ \mathrm{j} = 1,2,...,\mathrm{k} \\ b_{uj} &= a_4\sum_{i=1}^{N} x_{ui} x_{ji} y_i;\ \mathrm{u} \neq \mathrm{j};\ \mathrm{j},\mathrm{u} = 1,2,...,\mathrm{k} \\ b_{jj} &= a_5\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i + a_6\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i + a_7\sum_{i=1}^{N} y_i \end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

$$s^2_{b_0} = a_1 s^2_y \;\; s^2_{b_j} = a_3 s^2_y \;\; s^2_{b_{uj}} = a_4 s^2_y \;\; s^2_{b_{jj}} = (a_5 + a_6) s^2_y, \qquad (6.66)$$

где значения a_i приведены в таблице в таблице 6.9.

Таблица 6.9.

k	N	N_0	α	a_1	a_2	A_3	a_4	a_5	a_6	a_7
2	13	5	1,412	0,2000	0,1000	0,1250	0,2500	0,1251	0,0187	0,1000
3	20	6	1,682	0,1663	0,0568	0,0732	0,1250	0,0625	0,0069	0,0568
4	31	7	2,000	0,1428	0,0357	0,0417	0,0625	0,0312	0,0037	0,0357
5	32	6	2,000	0,1591	0,0341	0,0417	0,0625	0,0312	0,0028	0,0341

Дисперсию воспроизводимости определяют по опытам в центре плана:

$$S^2_{BOCПР} = \frac{\sum_{u=1}^{N_0} (y_u^0 - \bar{y}^0)^2}{N_0 - 1} \quad \bar{y}^0 = \frac{\sum_{u=1}^{N_0} y_u^0}{N_0} \quad f_{BOCПР} = (N_0 - 1).$$

Остаточная дисперсия определяется по формуле:

$$S^2_{OCT} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - L} \quad f_{OCT} = (N - L).$$

Адекватность уравнения регрессии определяют по критерию Фишера:

$F_{PAC} = \dfrac{S^2_{АД}}{S^2_{BOCПР}}$, где дисперсия адекватности:

$$S^2_{АД} = \frac{S^2_{OCT} f_{OCT} - S^2_{BOCПР} f_{BOCПР}}{f_{АД}} \quad f_{АД} = f_{OCT} - f_{BOCПР}$$

Уравнение адекватно, если $F_{PAC} < F_{1-p}(f_1, f_2)$, где $f_1 = f_{АД} \;\; f_2 = f_{BOCПР}$.

Значимость коэффициентов определяют по критерию Стьюдента, однако, если один из квадратичных критериев оказался незначимым, то после его исключения коэффициенты уравнения регрессии необходимо пересчитать заново.

Основная литература

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 1985. -327с.
2. Инков А.М. Моделирование и идентификация объектов управления. Методические указания к выполнению лабораторных работ для студентов спец. 050702. Шымкент, ЮКГУ, 2010 г., -78 с.

Дополнительная литература

3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 1986. -336с.
4. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 1979